Übungsblatt 9 Abgabe: 08.01.03	Theoretische Physik (für Physiker): Mechanik	Prof. Dr. H.-J. Kull Theoretische Physik A Laserphysik

(H25) Ein Massenpunkt bewege sich in einem Zentralpotential $U(r)$ in der Ebene $z = 0$. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Gleichungen 2.Art an. Bestimmen Sie daraus die Erhaltungssätze für den Drehimpuls und die Energie.

(H26) Die Lagrangefunktion eines Massenpunkts m mit der Ladung q und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ sei

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) \ .$$

Hier bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und $\phi(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ bezeichnen die Potentiale des elektromagnetischen Feldes

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \ , \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \ .$$

Zeigen Sie, daß die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Teilchens die bekannte Form

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

annehmen.

(H27) Ein Massenpunkt bewege sich auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R in einem konstanten Schwerefeld $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ in z-Richtung.

a) Wählen Sie die Winkel der Kugelkoordinaten(r, φ, ϑ) als generalisierte Koordinaten und geben Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes an.
b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Winkel ϑ und φ her.
c) Zeigen Sie, daß der Drehimpuls in z-Richtung erhalten ist und bestimmen Sie damit eine Bewegungsgleichung für den Winkel ϑ. Unter welcher Bedingung ist eine Kreisbahn um die z-Achse möglich? Bestimmen Sie den Winkel ϑ der Kreisbahn im Grenzfall kleiner Drehimpulse.

Zusatzaufgaben

(Bearbeitungspunkte der folgenden Zusatzaufgaben werden bis zur Maximalzahl der Bearbeitungspunkte aller Hausaufgaben angerechnet.)

(Z1) Zwei identische Teilchen ziehen sich gegenseitig mit konstanter Kraft an. Sie können sich dabei nur entlang der x-Achse bewegen und einander reibungsfrei durchdringen.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Teilchen.

b) Diskutieren Sie die Relativbewegung der beiden Teilchen anhand des Potentials und der Phasenkurven.

c) Bestimmen Sie die Lösung über eine Schwingungsperiode.

(Z2) Bei der Bewegung eines Massenpunktes in einem Potential $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha =$const) gibt es neben der Energie E und dem Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ noch eine weitere Erhaltungsgröße

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L} - \alpha \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \qquad \text{(Lenzscher Vektor).}$$

a) Zeigen Sie, daß der Vektor $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

b) Berechnen Sie das Betragsquadrat A^2 und drücken Sie das Ergebnis durch die Konstanten L^2, E und α aus.

(Z3) Ein Teilchen bewege sich auf einer ebenen Spirale

$$r = ct, \qquad \varphi = \omega t, \qquad c,\ \omega : \text{const}$$

a) Geben Sie die Komponenten der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und des Drehimpulses in Zylinderkoordinaten an.

b) Wie groß ist die Krümmung der Bahn am Ort des Teilchens zur Zeit t.