Übungsblatt 9 Ausgabe: 12.06.07 Abgabe: 19.06.07	Laserphysik Prof. Dr. H.-J. Kull Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik	Mitarbeiter: Thomas Pesch pesch@ilt.fhg.de

(G1) Berechnen Sie die Matrixelemente

$$\langle n'l'm'|\boldsymbol{r}|nlm\rangle$$

für die stationären Zustände eines Wasserstoffatoms $|nlm\rangle$ mit den Hauptquantenzahlen $n = 1$ und $n' = 2$. Beschränken Sie sich auf den Fall, in dem der Ortsoperator in die Quantisierungsachse des Wasserstoffatoms zeigt, $\boldsymbol{r} = z\boldsymbol{e}_z$.

(a) Welche Werte von l, m, l', m' sind für $n = 1$ und $n' = 2$ jeweils möglich? Welche Matrixelemente verschwinden aufgrund von Auswahlregeln? Zeigen Sie dies auch explizit durch Berechnung. Berechnen Sie alle nicht verschwindenden Matrixelemente.

(b) Bestimmen Sie die Oszillatorstärke des $1 \to 2$ Überganges,

$$f_{21} = \frac{2m_0}{\hbar^2}(E_2 - E_1)\sum_{l=0}^{1}\sum_{m=-l}^{l}|\langle 2,l,m|z|1,0,0\rangle|^2 .$$

Die Energieeigenwerte sind dabei $E_n = -\frac{1}{2n^2}\frac{q_e^2}{a_B}$.

<u>Hinweis</u>:
Verwenden Sie die Ortsdarstellung. Drücken Sie x, y, z in Kugelkoordinaten aus und schreiben Sie den Ortsvektor in der Form $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{n}$ mit Radius r und Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$.

$$\langle\boldsymbol{r}|nlm\rangle = Y_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$$R_{10} = 2a_B^{-3/2}e^{-r/a_B}, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}}a_B^{-3/2}\frac{r}{2a_B}e^{-r/(2a_B)}$$

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e q_e^2} \quad \text{(Bohrscher Radius)}$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$$

(H1) Übergänge in einem Feld mit diskretem Spektrum.

Ein Atom befinde sich in einem Laserfeld $\mathcal{E}(t) = Re\{E(t)\}$, das als Superposition von äquidistanten Moden der Frequenz $\omega_n = \omega + n\delta\omega$ $(n = 0, \pm 1, ...)$ dargestellt wird:

$$E(t) = A(t)e^{-i\omega t}, \qquad A(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\delta\omega t}.$$

Der Einfachheit halber wird hier für jede Mode die gleiche Feldstärke E_0 angenommen. Für die Übergangswahrscheinlichkeit in Störungsrechnung ergibt sich

$$p = \frac{1}{4}\rho_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta_n t/2)}{(\Delta_n/2)^2}, \qquad \rho_0^2 = \frac{|\boldsymbol{d}_{21} \cdot \boldsymbol{e}|^2}{\hbar^2}|E_0|^2.$$

Dabei bezeichnet Δ_n die Verstimmung zwischen der atomaren Übergangsfrequenz ω_{21} und der Frequenz der n-ten Mode ω_n,

$$\Delta_n = \omega_{21} - (\omega + n\delta\omega) = -(q+n)\delta\omega.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die Übergangsrate $r = \dot{p}$ darstellen läßt als

$$r = \frac{r_0}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(q+n)\tau}{(q+n)}.$$

Bestimmen Sie dabei r_0 und τ.

(b) Führen Sie die Summation in der Übergangsrate r für die beiden Fälle $q = \frac{1}{2}$ (maximale Verstimmung) und $q = 0$ (exakte Resonanz) aus. Schlagen Sie die auftretenden Fourierreihen in einer Formelsammlung nach.