Übungsblatt 8 Ausgabe: 5.06.07 Abgabe: 12.06.07	Laserphysik Prof. Dr. H.-J. Kull Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik	Mitarbeiter: Thomas Pesch pesch@ilt.fhg.de

(G1) Das quantenmechanische Lorentzmodell:

(a) Berechnen Sie die Polarisierbarkeit eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators (Masse m, Ladung q, Potential $fx^2/2$), der durch ein elektrisches Feld $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ angeregt wird. Verwenden Sie zur Berechnung des Erwartungswertes des Dipolmomentes ($d = qx$) das Ehrenfest-Theorem:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = \langle F(x,t)\rangle.$$

Hierbei bezeichnet $F(x,t)$ den Erwartungswert der Kraft, die als Funktion des Ortsoperators aufzufassen ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem klassischen Lorentzmodell.

(b) Nach der quantenmechanischen zeitabhängigen Störungsrechnung erster Ordnung gilt für die Polarisierbarkeit

$$\alpha_{sr} = \frac{q^2}{m}\sum_j \frac{f_{nj}}{\omega_{nj}^2 - \omega^2},$$

$$f_{nj} = \frac{2m}{\hbar}|x_{nj}|^2\omega_{nj}, \quad x_{nj} = \langle n|x|j\rangle, \quad \omega_{nj} = \omega_n - \omega_j.$$

Berechnen Sie die Oszillatorstärke f_{nj} für den harmonischen Oszillator und führen Sie dann die Summation über j aus. Vergleichen Sie das störungstheoretische Ergebnis mit dem exakten Ergebnis aus (a). Hinweis: Für den harmonischen Oszillator gilt

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a + a^+), \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

(H1) Berechnen Sie quantenmechanisch die Einsteinschen A- und B-Koeffizienten für einen harmonischen Oszillator.

<u>Anleitung</u>:

(a) Der Ausgangszustand sei $|n\rangle$. Für die Übergänge $n \to n \pm 1$ lauten die Koeffizienten

$$A_{n,n-1} = \frac{4}{3}\frac{\omega_0^3}{c^3}\frac{|\langle n\,|d|\,n-1\rangle|^2}{\hbar},$$
$$B_{n,n\pm 1} = 2\pi\frac{|\langle n\,|d|\,n\pm 1\rangle|^2}{\hbar^2}.$$

Hierbei ist ω_0 die Übergangsfrequenz und

$$d = q\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(a + a^\dagger\right)$$

der Operator des Dipolmoments. Die Polarisationsrichtung des Lichtfeldes ist parallel zur Dipolachse angenommen.

(b) Berechnen Sie die durch spontane Emission aus dem Zustand $|n\rangle$ abgestrahlte Leistung $P = \hbar\omega_0 A_{n,n-1}$ und die Energieverlustrate $r = P/E$ mit $E = E_n - E_0$.

(c) Berechnen Sie, unter Vernachlässigung der spontanen Emission, die effektiv absorbierte Leistung, $P_{abs} = \hbar\omega_0(B_{n+1,n} - B_{n,n-1})\varrho(\nu_0)$, in einem Strahlungsfeld mit der spektralen Energiedichte $\varrho(\nu)$ für einen festen Zustand $|n\rangle$.