Poynting-Theorem:

Allgemeiner Energieerhaltungssatz für elektromagnetische Felder $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$

$$\boxed{\partial_t W_{em} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}}$$

$$W_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2\right) \qquad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} W_{em}: & \text{Energiedichte des elektromagnetischen Feldes;} \\ \boldsymbol{S}: & \text{Poynting-Vektor;} \\ \boldsymbol{j}: & \text{Stromdichte;} \\ c: & \text{Lichtgeschwindigkeit.} \end{cases}$$

Erhaltungssatz für die Energie elektromagnetischer Wellen im Medium:

Ebene Welle mit komplexer Wellenzahl und komplexer Frequenz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}} &= \Re\{\boldsymbol{E}\}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{ikz-i\omega t}, \\ \boldsymbol{\mathcal{B}} &= \Re\{\boldsymbol{B}\}, \qquad \boldsymbol{B} = n\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{t}, \qquad & k = k_r + ik_i, \qquad \omega = \omega_r + i\omega_i. \end{aligned}$$

Dielektrische Funktion ϵ und Brechungsindex n:

$$\begin{aligned} k &= k_0 n, \qquad k_0 = \omega/c \qquad n = \sqrt{\epsilon} \\ n &= n_r + in_i, \qquad \epsilon = \epsilon_r + i\epsilon_i, \\ \epsilon_r &= n_r^2 - n_i^2, \qquad \epsilon_i = 2n_r n_i. \end{aligned}$$

Zeitgemittelter Energieerhaltungssatz ($\omega_i \ll \omega_r$):

$$\boxed{\partial_t W + \partial_z I = -P_a}$$

$$W = \left[|\epsilon| + \frac{d(\omega\epsilon_r)}{d\omega}\right]\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{16\pi}, \qquad I = cn_r\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi}, \qquad P_a = \omega\epsilon_i\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi}$$

$$\begin{cases} W: & \text{Energiedichte;} \\ I: & \text{Intensität, Energiestromdichte;} \\ P_a: & \text{Absorbierte Leistungsdichte.} \end{cases}$$

- Undurchlässiges Medium: $n_r = 0$ bzw. $\epsilon = (in_i)^2 = -n_i^2 < 0$
- Absorption: $\epsilon_i > 0$, Verstärkung: $\epsilon_i < 0$
- Reelle frequenzunabhängige Dielektrizitätsfunktion: $W = \epsilon |E|^2/(8\pi)$

Definition und Eigenschaften der Mittelwerte:

Komplexe Felder:

$$\tilde{A} = A(t)e^{\tau}, \qquad A(t) = A_0 e^{-i\omega_r t + ik_r z}, \qquad \tau = \omega_i t - k_i z$$

Reelle Felder:

$$\tilde{\mathcal{A}}(t,\tau) = \mathcal{A}(t)e^{\tau}, \qquad \mathcal{A}(t) = \Re\{A(t)\}$$

Mittelwert über Periode $T = 2\pi/\omega_r$ bei festem Wert von τ:

$$\boxed{<\tilde{\mathcal{A}}(t,\tau)> = <\mathcal{A}(t)> e^{\tau}, \qquad <\mathcal{A}(t)> = \frac{1}{T}\int_0^T dt\mathcal{A}(t)}$$

Mittelwerte quadratischer Ausdrücke:

$$<\tilde{\mathcal{A}}^2> \;=\; <\mathcal{A}^2 e^{2\tau}> = <\mathcal{A}^2> e^{2\tau} = \frac{1}{2}|A|^2 e^{2\tau} = \frac{1}{2}|\tilde{A}|^2$$

$$\begin{aligned} \partial_t <\tilde{\mathcal{A}}^2> &= <\mathcal{A}^2> \partial_t e^{2\tau} = 2\omega_i <\tilde{\mathcal{A}}^2> \\ <\partial_t \tilde{\mathcal{A}}^2> &= <(\partial_t \mathcal{A}^2)> e^{2\tau} + <\mathcal{A}^2> 2\omega_i e^{2\tau} = 2\omega_i <\tilde{\mathcal{A}}^2> \end{aligned}$$

Die Zeitmittelung bei festem τ darf also mit der Zeitableitung vertauscht werden:

$$\boxed{<\partial_t \tilde{\mathcal{A}}^2> = \partial_t <\tilde{\mathcal{A}}^2>}$$

Herleitung des Energiesatzes für elektromagnetische Wellen:

Setzt man im Poynting-Theorem die Felder der ebenen Welle ein und mittelt die einzelnen quadratischen Terme wie oben bei festem τ, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

Feldenergie:

$$<\partial_t W_{em}> \;=\; \partial_t <W_{em}> = \partial_t \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*}{16\pi} = \partial_t \frac{(1+|\epsilon|)\,(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)}{16\pi}.$$

Poynting-Vektor:

$$
\begin{aligned}
< \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} > &= \boldsymbol{\nabla} \cdot < \boldsymbol{S} > = \partial_z < S_z > = \partial_z \frac{c}{4\pi} < \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} > \cdot \boldsymbol{e}_z \\
&= \partial_z \frac{c}{8\pi} \Re\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*\} \cdot \boldsymbol{e}_z = \partial_z \frac{c}{8\pi} \Re\{\boldsymbol{E} \times (n^* \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}^*)\} \cdot \boldsymbol{e}_z \\
&= \partial_z \frac{c}{8\pi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \Re\{n\} = \partial_z \frac{c n_r}{8\pi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* = \partial_z I
\end{aligned}
$$

Energieaustausch mit dem Medium:

$$
< \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} > = \frac{1}{2} \Re\{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}^*\} = \frac{1}{2} \Re\{\sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*\} = \frac{1}{2} \sigma_r \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*.
$$

Definition von σ:

$$
\epsilon = 1 + \frac{4\pi\sigma}{-i\omega}, \qquad \sigma = \frac{i\omega}{4\pi}(1 - \epsilon)
$$

Entwicklung von $\sigma(\omega)$ um $\omega = \omega_r$ für $\omega_i << \omega_r$ bis zur ersten Ordnung:

$$
\sigma(\omega) = \sigma(\omega_r + i\omega_i) = \sigma(\omega_r) + \left.\frac{d\sigma}{d\omega}\right|_{\omega_r} i\omega_i = \sigma(\omega_r) + \frac{d\sigma(\omega_r)}{d\omega_r} i\omega_i
$$

Realteil von σ

$$
\begin{aligned}
\sigma_r(\omega) &= \sigma_r(\omega_r) - \omega_i \frac{d\sigma_i(\omega_r)}{d\omega_r} \\
&= \frac{\omega_r \epsilon_i}{4\pi} - \frac{\omega_i}{4\pi} \frac{d(\omega_r(1 - \epsilon_r(\omega_r)))}{d\omega_r} \\
&= \frac{\omega_r \epsilon_i}{4\pi} - \frac{2\omega_i}{8\pi} \left[1 - \frac{d(\omega_r \epsilon_r(\omega_r))}{d\omega_r}\right]
\end{aligned}
$$

Ergebnis:

$$
< \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} > = P_a + \partial_t \left\{ \left[-1 + \frac{d(\omega_r \epsilon_r(\omega_r))}{d\omega_r}\right] \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{16\pi} \right\}.
$$

Die Terme für die Feldenergie, den Poynting-Vektor und den Energieaustausch zusammen ergeben den angegebenen Energiesatz.