Ergänzungen zur Physik WS 04/05

für

Lehramtsstudierende

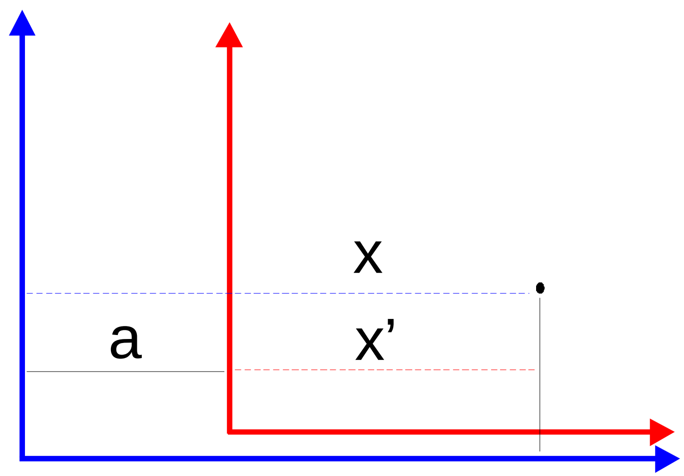
Vektorrechnung

- Koordinatentransformationen
- Addition und Subtraktion
- Multiplikation mit Skalaren
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt

Koordinatentransformationen

Verschiebung und Drehung kartesischer Koordinatensysteme

- Translation (in x-Richtung)

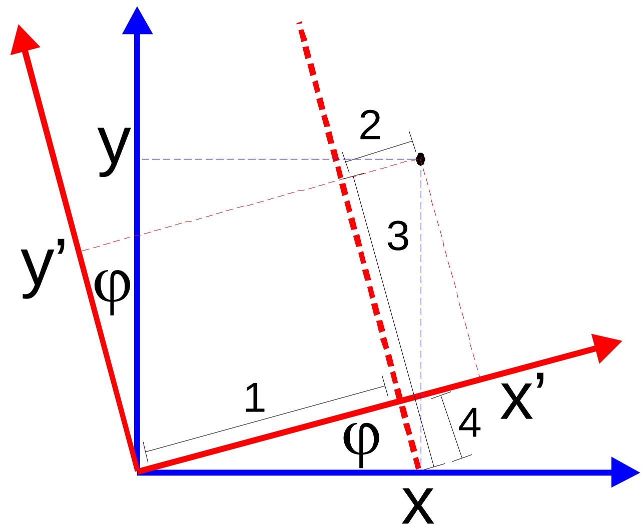


$$x' = x - a$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

- Rotation (um z-Achse)



$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \qquad (1+2)$$

$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi \qquad (3-4)$$

$$z' = z$$

Transformation von Vektorkomponenten

Vektorkomponenten transformieren sich wie Koordinatendifferenzen

Koordinatendifferenzen

- Translation

$$\Delta x' = \Delta x$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

- Rotation (um z-Achse)

$$\Delta x' = \Delta x \cos\varphi + \Delta y \sin\varphi$$

$$\Delta y' = \Delta y \cos\varphi - \Delta x \sin\varphi$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

Vektorkomponenten

- Translation

$$a_x' = a_x$$

$$a_y' = a_y$$

$$a_z' = a_z$$

- Rotation (um z-Achse)

$$a_x' = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$$

$$a_y' = a_y \cos\varphi - a_x \sin\varphi$$

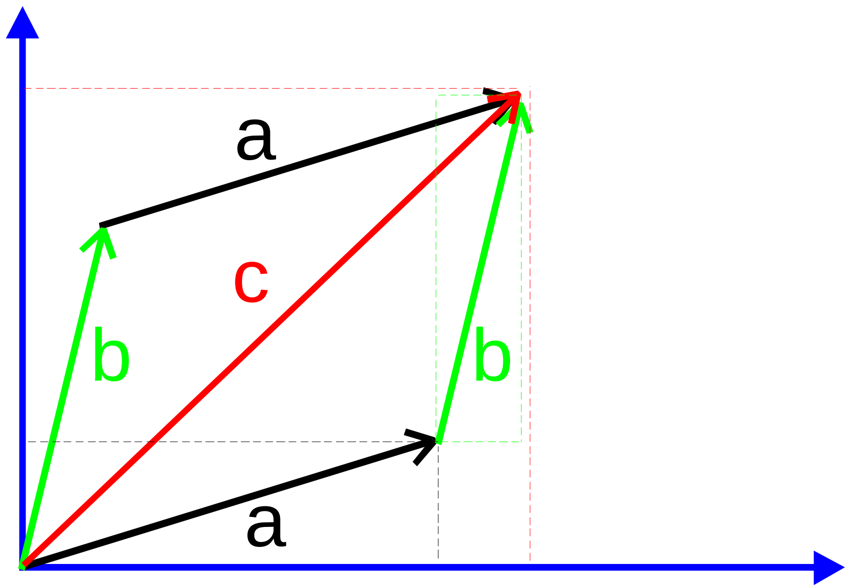
$$a_z' = a_z$$

Vektoraddition

Summe zweier Vektoren ist wieder ein Vektor

- Komponentendarstellung

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$



- Kommutativgesetz

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

- Assoziativgesetz

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Vektorsubtraktion

Vektoren bilden eine kommutative Gruppe

- Inverser Vektor $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

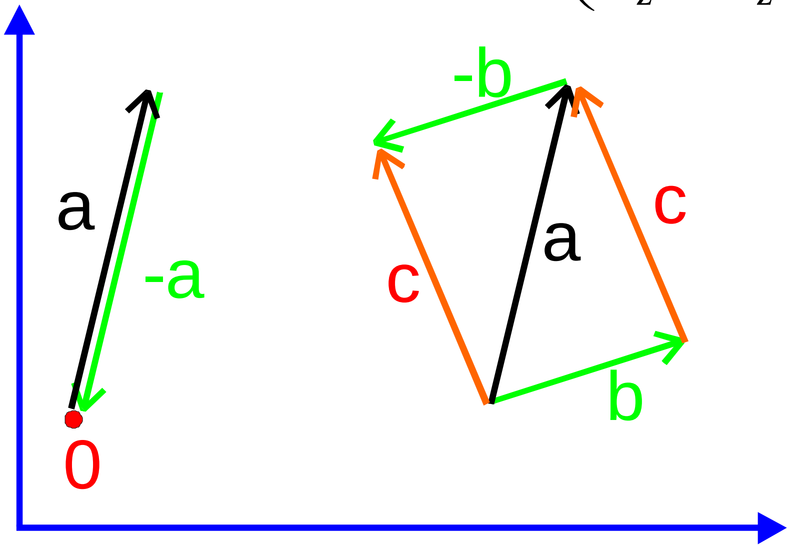
$$-\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

- Nullvektor $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Subtraktion

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$



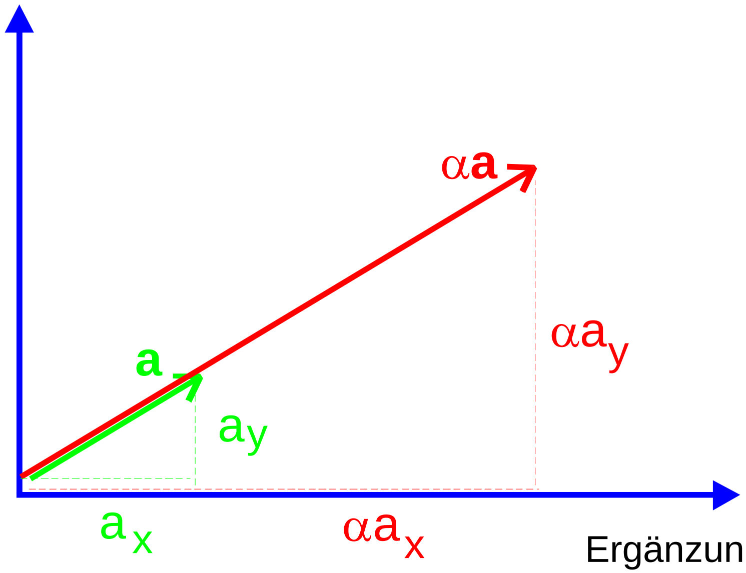
Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Vektoren mit Zahlenkörper bilden Vektorraum

- Komponentendarstellung

$$\alpha\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}$$

- Geometrisch: Längenänderung



- Distributivgesetz

$$(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}$$

$$\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$$

- Assoziativgesetz

$$\alpha\,(\beta\,\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{a}$$

- Einselement

$$1\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

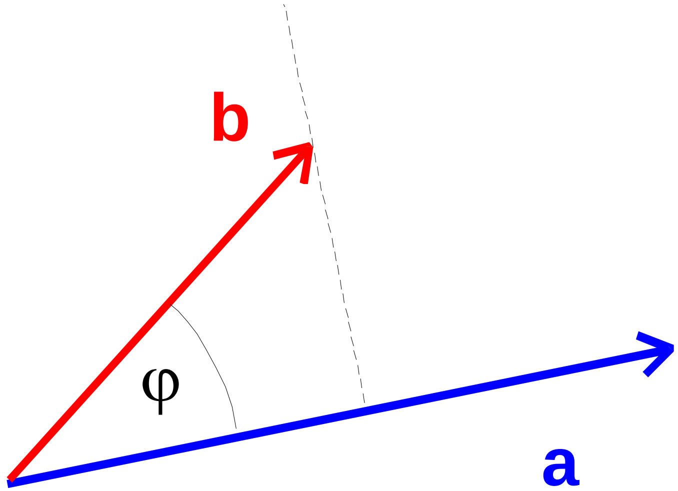
- Parallele Vektoren

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \beta\,\mathbf{b}$$

Skalarprodukt von Vektoren

Vektorraum mit Skalarprodukt ist Euklidischer Raum

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\varphi$$



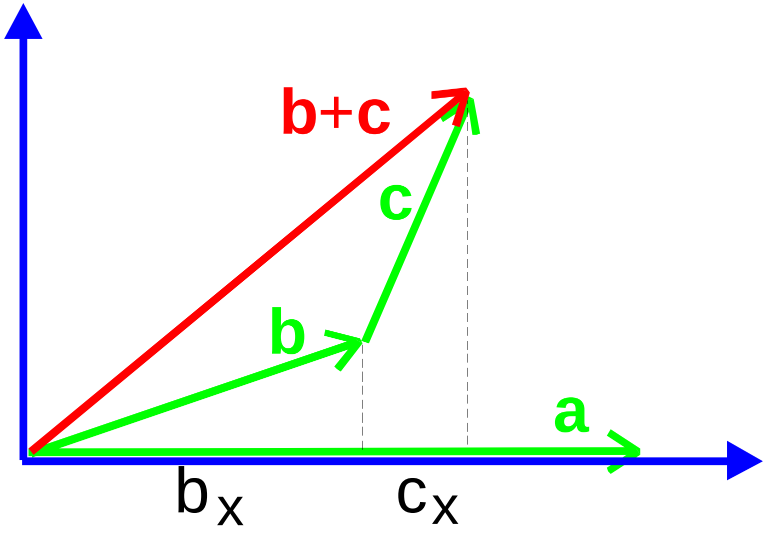
- Kommutativgesetz

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

- Linearitätseigenschaften

$$(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

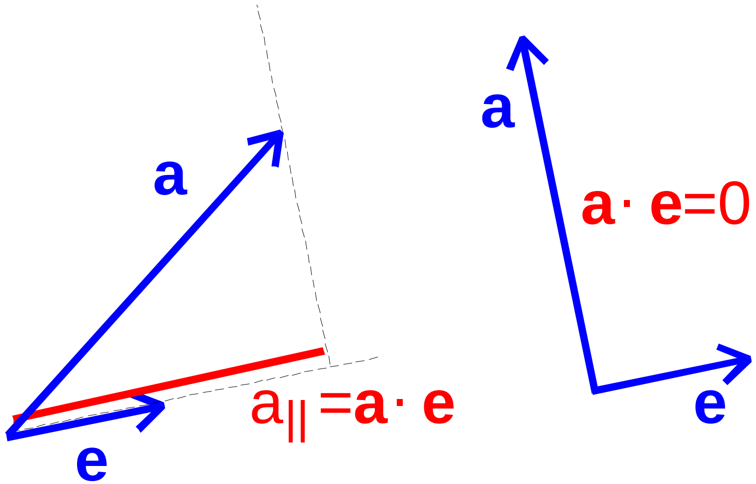


Weitere Eigenschaften des Skalarproduktes

- Projektion und Orthogonalität

$$a_{||} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = a \cos \varphi$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$$



- Orthonormalbasis

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

- Komponentendarstellung

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z \right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Länge $\quad a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Differentiation einer Vektorfunktion

- Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

- Geschwindigkeit

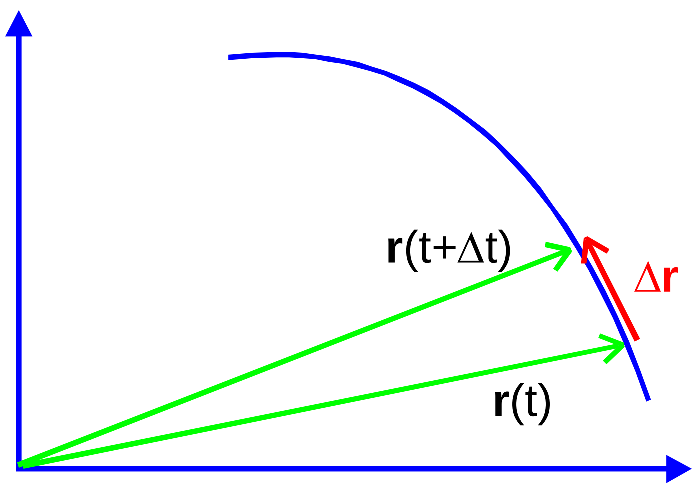
$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_{\mathrm{x}}(t) \\ \mathrm{v}_{\mathrm{y}}(t) \\ \mathrm{v}_{\mathrm{z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

- Vektorielles Wegelement

$$d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$



Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

- Kompnentendarstellung

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$