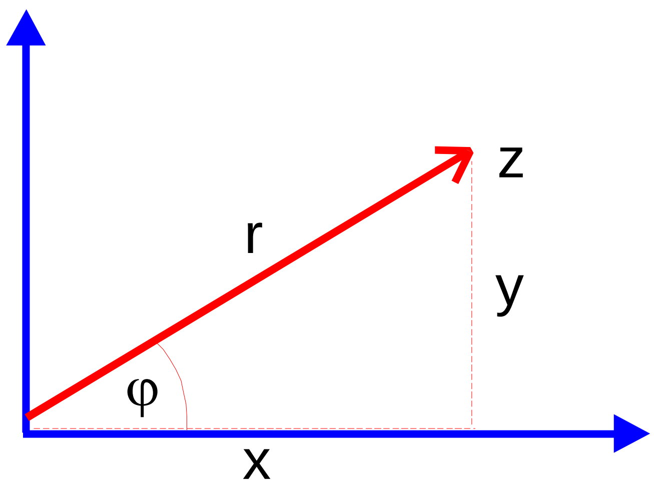
Komplexe Zahlen

- Komplexe Zahlenebene
- Komplexe Multiplikation
- Exponentialfunktion
- Rechenregeln

Komplexe Zahlenebene

- Den Punkten einer zweidimensionalen Ebene werden die komplexen Zahlen zugeordnet

$$(x, y) \mapsto z = x + iy$$



- Einheiten

$$(1,0) \mapsto 1, \quad (0,1) \mapsto i$$

- Realteil

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi$$

- Imaginärteil

$$y = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi$$

- Betrag

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Argument

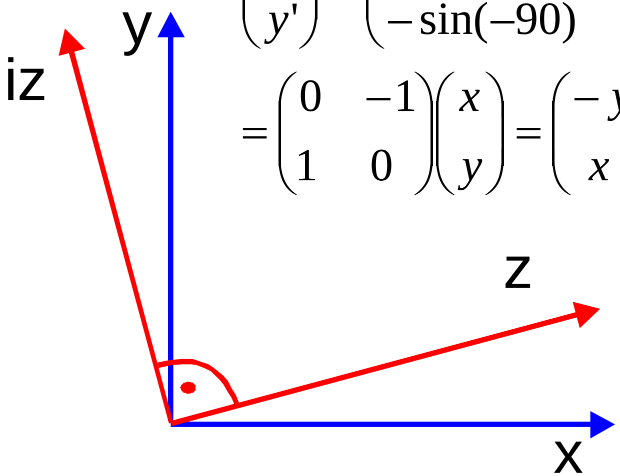
$$\arg(z) = \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Komplexe Multiplikation

- Multiplikation mit i entspricht 90°-Drehung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-90) & \sin(-90) \\ -\sin(-90) & \cos(-90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$z = x + iy$$

$$z' = iz = -y + ix$$

- Multiplikationsregeln

$$i^2 = i(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- Konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Potenzreihen

- Potenzreihe

$$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Taylor-Reihe einer Funktion

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- Übereinstimmung in allen Ableitungen:

$$f(0) = P(0) = a_0 \qquad f'(0) = P'(0) = 1a_1 \qquad f''(0) = P''(0) = 2a_2$$

$$f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0) = n! a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Exponentialfunktion

$$\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1 \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp^{(n)}(i\varphi) = i^n \exp(i\varphi) \qquad \exp(i\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\exp(i\varphi)$$

Rechenregeln

- Exponentialfunktion

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z)$$

- Produkte

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

- Quotienten

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\exp[i(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

- Potenzen

$$z^n = r^n \exp(in\varphi)$$

- Wurzeln

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\varphi}{2} + ik\pi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp(i\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

- Logarithmus

$$\log z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$